代数曲線に関する Grothendieck 予想 — p 進幾何の視点から

望月 新一 （京大数理研）

目次

I. 入門

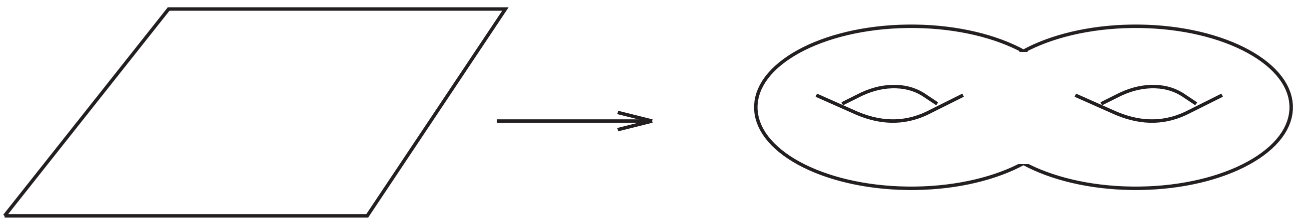
(A.) 双曲型リーマン面の一意化

本稿の主題は、**p 進体**上の代数曲線に関する Grothendieck 予想であるが、抽象的な p 進の話に進む前に、まず、より具体的でかつよりよく知られている複素数体 $\mathbf{C}$ 上の場合を復習しよう。実際、以下の (D.) でも説明するように、この複素数体の話は、p 進の場合の証明のヒントを与えている重要な動機付けともなっているのである。

X を、複素数体 $\mathbf{C}$ 上の**双曲的曲線**としよう。「双曲的曲線」とは、滑らかで基礎体上固有 (proper) な種数 g の代数曲線から r 個の点を抜いてできる曲線で、曲線の「型」(g, r) が、不等式 $2g-2+r>0$ を満たしているものをいう。この場合、基礎体が複素数体であるから、代数関数を、正則 (holomorphic) な関数とみなすことによって、$\mathbf{C}$ 値有理点の集合 $X(\mathbf{C})$ に**リーマン面**としての構造が入る。このようにできるリーマン面 $\mathcal{X}$ を「有限型双曲的リーマン面」という。

リーマン面 $\mathcal{X}$ は、特に位相空間でもあるから、初等的位相幾何からすぐ分かるように、$\mathcal{X}$ に対して、普遍被覆 $\widetilde{\mathcal{X}}$ が定まる。しかも、$\mathcal{X}$ の正則構造を $\widetilde{\mathcal{X}}$ に引き戻すことによって、$\widetilde{\mathcal{X}}$ にも自然な正則構造が入ることが分かる。従って、$\widetilde{\mathcal{X}}$ もリーマン面になるわけだが、このようなリーマン面について知られているもっとも基本的な事実は**「Köbe の一意化定理」**である：

定理 (Köbe): $\mathcal{X}$ の普遍被覆 $\widetilde{\mathcal{X}} \cong$ 上半平面 $\mathfrak{H} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{z \in \mathbf{C} \mid z\text{の虚部} > 0\}$。ただし、「$\cong$」は**正則**な同型である。



この定理について様々な面白い指摘ができるが、その内の一つは、「左辺」に出てくる $\mathcal{X}$ は、型の (g, r) を固定しても、沢山の可能性＝モジュライ（正確には、$3g-3+r$ 複素次元分）があるのに対して、「右辺」の $\mathfrak{H}$ はそのモジュライには一切依存しないことである。

言い換えれば、この定理は、「X という（純）**代数的**なものが、$\mathfrak{H}/\pi_1(\mathcal{X})$ という**幾何的ないし解析的な**表示をもつ」ことを言っているとみることができる。つまり、標語的に書けば、

$$\text{代数曲線 } X \quad \Longleftrightarrow \quad \pi_1(\mathcal{X}) \curvearrowright \mathfrak{H}$$

ここで、

$$\text{右辺} = \pi_1(\mathcal{X}) + \text{ある「数論的」なデータ}$$

つまり、右辺は、$\mathcal{X}$ の**モジュライによらない**（型 $(g,r) = \mathcal{X}$ の台位相空間だけで決まる）$\pi_1(\mathcal{X})$ と、$\mathcal{X}$ の**モジュライに本質的による** $\pi_1(\mathcal{X})$ の $\mathfrak{H}$ への作用という二つの部分にきれいに分かれるのである。因みに、ここで、複素数体上の解析的な話にもかかわらず、「数論的」という言葉を使用したが、それは、（数体等の）「無限素点における数論」という考え方によるものである。

(B.) 数論的基本群

K を体とし、X_K を K 上の代数多様体とする。すると、X_K に対して、その**代数的基本群** $\pi_1(X_K)$ を対応させることができる。この群 $\pi_1(X_K)$ はコンパクトな副有限 (profinite) 位相群で、X_K の有限次エタール（＝不分岐）被覆を統制するものとして、Grothendieck らが 1960 年代はじめに、普通の位相空間の基本群の代数的な類似として定義したものである。より正確には、$\pi_1(X_K)$ の連続な作用をもつ有限集合の圏と、X_K の有限次エタール被覆の圏の間には、自然な圏同値が成り立つ。

例えば、K が複素数体 $\mathbf{C}$ の代数的に閉じた部分体のとき、$\pi_1(X_K)$ は、**普通の位相的基本群**

$$\pi_1^{\mathrm{top}}(X_K \otimes_K \mathbf{C} \text{ に対応する複素多様体 } \mathcal{X})$$

の**副有限完備化**（＝その群の有限商全体のなす射影系の逆極限）に自然に同型になる。このように、K が（標数 0 の）閉体であるときは、$\pi_1(X_K)$ は古典的な位相幾何に結び付く幾何的な解釈を持つので、K が閉体のときは、$\pi_1(X_K)$ を X_K の**「幾何的基本群」**と呼ぶ。

一方、K が閉体でないときは、"π_1" の関手性から、次のような完全系列ができる：

$$1 \to \pi_1(X_{\overline{K}}) \to \pi_1(X_K) \to \Gamma_K \to 1$$

ここで、$\overline{K}$ は、K の（ある）代数閉包、$\Gamma_K \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ は K の絶対ガロア群、$X_{\overline{K}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} X_K \otimes_K \overline{K}$、そしてこの場合、真中の $\pi_1(X_K)$ を、（慣用から）X_K の**「数論的基本群」**という。以下では、この完全系列全体の構造を問題にしたいのだが、まずは、その構成部分の性質を確認しておきたい。当然のこと

ながら、右の Γ_K は、X_K のモジュライにはよらないが、実は、K が**標数０**のとき、**幾何的基本群** $\pi_1(X_{\overline{K}})$ **もモジュライによらず**、型の (g,r) だけで決まってしまうのである。一方、K が**正標数**のときは、幾何的基本群 $\pi_1(X_{\overline{K}})$ の構造は非常に複雑で、一般にはまだ余りよく理解されていないが、少なくとも X_K の種数 g が 0 のとき、幾何的基本群が X_K のモジュライによらないどころか、むしろその**モジュライを決定しがち**であることが、最近の玉川氏の研究 ([T2]) によって明らかになっている。

以下では、上の完全系列の他にももう一つの完全系列を考えたい：まず、素数 p を固定しておく。すると、

$$\Delta_X \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1(X_{\overline{K}}) \text{ の最大 pro-}p\text{ 商} = \text{「\textbf{pro-p 幾何的基本群}」}$$

$$\Pi_{X_K} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Delta_X/\mathrm{Ker}(\pi_1(X_{\overline{K}}) \to \Delta_X) = \text{「\textbf{pro-p 数論的基本群}」}$$

と定義しておくと、次のような完全系列ができる：

$$1 \to \Delta_X \to \Pi_{X_K} \to \Gamma_K \to 1$$

そこで、Γ_K の元 γ に対して、その Π_{X_K} への持ち上げ $\pi \in \Pi_{X_K}$ をとってきて、正規部分群の Δ_X を π で共役すると、Δ_X の自己同型が引き起こされるが、持ち上げ π の取り方によって、この自己同型には一定の不定性が生じる。その不定性をよく調べてみると、それはちょうど、Δ_X を Δ_X 自身の元で共役することによって生じる自己同型、即ち、Δ_X の「内部自己同型」が掛かるような不定性なのである。つまり、γ に対して、$\mathrm{Out}(\Delta_X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Aut}(\Delta_X)/\mathrm{Inn}(\Delta_X)$ の元を対応させることができたのである。記号で書けば、この対応は準同型

$$\Gamma_K \to \mathrm{Out}(\Delta_X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Aut}(\Delta_X)/\mathrm{Inn}(\Delta_X)$$

になっていて、このような準同型があったとき、「Γ_K が Δ_X に**外作用**している」という。実は、この場合には、情報として、上の完全系列と、この外作用は同値であり、特に、外作用から出発して、簡単な群論的な操作を行なうことによって、上の完全系列を復元することができる。従って、Γ_K や Δ_X と違って、Π_{X_K} は X_K のモジュライによっているものなので、上の外作用も X_K のモジュライによるはずである。

上の話を少し整理してみると、次のような（二つの）対応をつくることができたのである：

$$X_K \mapsto \{\pi_1(X_{\overline{K}})\ +\ \Gamma_K \curvearrowright \pi_1(X_{\overline{K}})\}$$

$$\text{又は}\ \ \{\Delta_X\ +\ \Gamma_K \curvearrowright \Delta_X\}$$

ところが、この対応の左辺と右辺に出てくる対象たちのいでたちをよくみてみると、左辺は代数曲線、右辺は位相（$\Longleftrightarrow$ 型）だけで決まる幾何的基本群＋それに入る自然な「数論的付加構造」、というふうに、(A.) の $\mathbf{C}$ 上の一意化定理を連想させるものがある。従って、複素数体の場合の話にならって、今度の対応でも、

「$\mapsto$」を、「$\leftrightarrow$」で置き換えることはできないか？

と問い掛けることができる。（ただし、ここで、「$\leftrightarrow$」とは、「何らかの同値性」の意味。）これが、いわゆる**「Grothendieck 予想」**である。

ただし、よく考えてみると、このような「同値 $\leftrightarrow$」は、任意の K と X_K に対して成り立つ筈がない。実際、Grothendieck 予想でも、このことへの言及もちゃんとあって、K は数体（＝有理数体 $\mathbf{Q}$ の有限次拡大）のように「十分に**数論的な体**」で、X_K は**「遠アーベルな多様体」**（＝正確な定義はないが、大雑把にいうと、**双曲的曲線**やそれに「関連した」多様体、またはそのような多様体に十分似ている多様体のこと）である場合にしかこの手の同値性の成立は期待されないのである。

(C.) 結果

素数 p を固定して、K を、$\mathbf{Q}_p$ 上有限生成な体の部分体（に同型な体）とする。このような体 K を**「劣 p 進体」**という。例えば、$\mathbf{Q}$ 上有限生成な体、$\mathbf{Q}_p$ 上有限生成な体、そして

$$K = \bigcup_{[K':\mathbf{Q}]\leq N} K'$$

のような無限次の代数体も全部「劣 p 進体」になる。本稿の主定理（詳しくは、[M2,3] を参照）は次の通りである：

定理 1: K は劣 p 進体、X_K は双曲的代数曲線 $/K$、S_K は滑らかな代数多様体 $/K$ とする。すると、自然な射たち

$$\begin{aligned} X_K(S_K)^{\mathrm{dom}} &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\Gamma_K}(\pi_1(S_K), \pi_1(X_K)) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\Gamma_K}(\Pi_{S_K}, \Pi_{X_K}) \end{aligned}$$

は全単射になる。ただし、$X_K(S_K)^{\mathrm{dom}}$ とは、定数射にならない（$\Longleftrightarrow$ "dominant" な) K 上のスキーム射たち $S_K \to X_K$ 全体のなす集合で、$\mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\Gamma_K}(?, ?)$ とは、一つ目の「?」から二つ目の「？」への開（＝開集合を開集合に写すような）で連続な準同型で、それぞれの「？」の Γ_K への射影と両立するものの（X_K の幾何的基本群による共役の作用に関する）同値類全体を表すとする。

そして、上の定理（の若干の一般化）の系として：

定理 2： K は劣 p 進体、L, M は（任意次元の）関数体 $/K$ する。すると、自然な射

$$\mathrm{Hom}_K(M, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\Gamma_K}(\Gamma_L, \Gamma_M)$$

は全単射になる。ただし、$\mathrm{Hom}_K(M, L)$ とは、K 上の環準同型たち $M \to L$ 全体のなす集合で、$\mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\Gamma_K}(?, ?)$ とは、一つ目の「?」から二つ目の「？」への開（＝開集合を開集合に写すような）で連続な準同型で、それぞれの「？」の Γ_K への射影と両立するものの（$\mathrm{Ker}(\Gamma_M \to \Gamma_K)$ による共役の作用に関する）同値類全体を表すとする。

注：

(i) ある条件を満たす「双曲的な曲面」に関する「曲面版」もあるが、この「曲面版」では、定理 1 と違って、任意の開準同型をゆるすのではなく、同型しか扱わないのである。

(ii) 左辺を「代数曲線 X_K の**代数的な点**」、右辺を「Π_{X_K} という**解析的な対象の点**」とみれば、Köbe の一意化定理と形が類似している。実際、ちょうどこのことにヒントを得たような手法によって定理 1 を証明するのである。その証明の方針は、次節の (D.) で紹介する。

(iii) Grothendieck 予想は、（定理 1 の形からしても自然なように）元々はアーベル多様体の Tate 予想の類似とみなされていて、従って、Tate 予想と同様、**大域的**な数体の上でしか成り立たないものと考えられていた。つまり、(ii) のような視点は予想当時なかったらしい。その原因の一つとして考えられるのは、アーベル多様体の Tate 予想（= Faltings [F2] の定理）は、定理 1 と違って、p 進体の上では成り立たないということである。

(iv) 定理 1 以前に、$\mathbf{Q}$ 上有限生成な体の上では、

- 中村博昭氏（種数 0 の X_K の場合、Isom 版 — [N]）
- 玉川安騎男氏（affine $\Longleftrightarrow r > 0$ を満たす X_K の場合、Isom 版 — [T1]）

（ただし、「Isom 版」＝定理 1 のそれぞれの “Hom” を “Isom” で置き換えたもの）の結果があり、特に、中村氏が有効に使い、玉川氏が本質的に改良した**「被覆の塔を組織的に利用する」**手法は定理 1 の証明でも用いている。（III. (B.), (C.) を参照。）

(v) K が $\mathbf{Q}$ 上有限生成のとき、定理 2 の Isom 版（＝定理 2 のそれぞれの “Hom” を “Isom” で置き換えたもの）は Pop の定理 ([P1,2]) である。

(D.) 保型形式

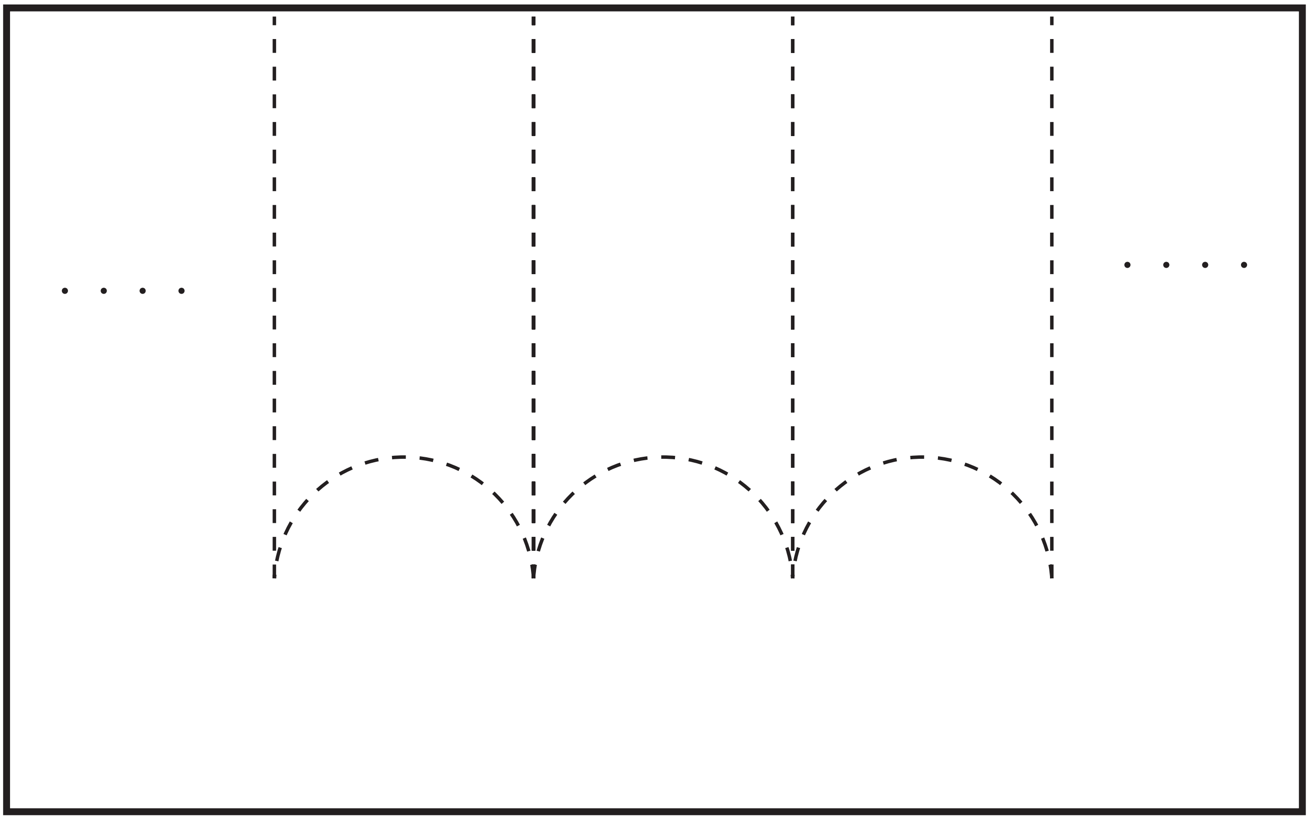
定理 1 を証明する上では、もっとも基本的な問題は

<u>問題</u>: $\{\Delta_X \ + \ \Gamma_K \curvearrowright \Delta_X\}$（= pro-$p$ 幾何的基本群＋それへのガロアの外作用）というデータから一体どうやって代数曲線 X_K を復元するか？

ということである。この問題の解決を複素数体上の理論に見出だすのである。複素数体の場合には、有限型双曲的リーマン面 $\mathcal{X}$ に対して、$\pi_1(\mathcal{X})$ と $\pi_1(\mathcal{X})$ の上半平面 $\mathfrak{H}$ への作用を対応させたのだが、逆に $\pi_1(\mathcal{X})$ の $\mathfrak{H}$ への作用から元の代数曲線 $X_{\mathbf{C}}$ を明示的に構成する方法も古典的複素解析によく現れるのである。それは、上半平面 $\mathfrak{H}$ の上で**保型形式**（= $\pi_1(\mathcal{X})$ の $\mathfrak{H}$ への作用に誘導される $\mathfrak{H}$ 上の微分形式たちへの作用に関して不変な（$\mathfrak{H}$ 上の）微分形式）を構成し、それらの微分形式を使って射影空間への写像を作るというものである。そのような写像（＝図式では、上の横方向の矢印）ができると、

$$\begin{array}{ccc} \text{上半平面 } \mathfrak{H} & \rightarrow & \text{射影空間} \\ \downarrow & \circlearrowright & \| \\ \text{代数曲線} & \hookrightarrow & \text{射影空間} \end{array}$$

元の代数曲線は、その写像の像（＝Chow の補題によって、自動的に問題の射影空間の**代数的**な部分多様体になる）として復元される。実際、この手の論法は、志村多様体の理論でもよく用いられ、例えば、$SL_2(\mathbf{Z})$ の $\mathfrak{H}$ への作用の場合、Poincaré 級数等がそのような保型形式を与えてくれるのである。とにかく、この議論で重要なことは、代数曲線の埋め込みを定義する微分形式たちは、最終的には代数曲線の上では代数的なものになるが、構成の段階においては、**解析的**な対象でしかない、ということである。



$SL_2(\mathbf{Z})$ の場合

定理 1 を証明するためには、ちょうどこのような議論を、今度は**「p 進の世界」**で行ないたいのだが、このことを達成するためには、**「p 進 Hodge 理論」**という技術を用いなければならない。「p 進 Hodge 理論」とは、p 進体上の多様体の de Rham cohomology と、ガロアの作用付きのétale cohomology が、ある適当な関手を介して、同値な対象であることを、主な内容とする理論である。p 進 Hodge 理論では、Grothendieck 予想と違って、「遠アーベル」、即ち「アーベル」からほど遠いものを扱うのではなく、最初から最後まで cohomology **加群**というアーベルな対象の世界でことが運ぶので、このような理論が、何で Grothendieck 予想と関係があるか、という疑問が自然に出てくるが、

もっと広く構造的な視点から見ると、p 進 Hodge 理論と Grothendieck 予想は深く類似しているのである。その類似性は、（以下の図式でも示しているように）多項式などからなる**代数幾何**の世界と、**ガロアの作用付きのエタール位相**の世界の間に、一種の同値性が成り立っていることを言っていることにある。

<u>Grothendieck 予想</u>

多様体の射	$\overset{\text{比較}}{\longleftrightarrow}$	基本群（の射）
「代数幾何」 「多項式 ＝関数」		「étale 位相＋ Galois 作用」

<u>p 進 Hodge 理論</u>

p 進体上の代数多様体に対して

de Rham (crystalline) cohomology	$\overset{\text{比較}}{\longleftrightarrow}$	p 進 étale cohomology
「多項式 ＝関数、 その微分」		「étale 位相＋ Galois 作用」

以下では、簡単のため、K を $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大とし、X_K を、K 上の proper で non-hyperelliptic な双曲的曲線とする。すると、$X_{\overline{K}} \overset{\text{def}}{=} X_K \otimes_K \overline{K}$ のヤコビ多様体を、$J_{X_{\overline{K}}}$ という記号で表すとすると、そのヤコビ多様体の p 進 Tate 加群と、X_K の pro-p 幾何的基本群のアーベル化の間に、自然な同型がある：

$$\Delta_X^{\mathrm{ab}} \simeq T_p(J_{X_{\overline{K}}})$$

従って、アーベル多様体の**「Hodge-Tate 分解」**という、Tate の 1960 年代の仕事に遡る、p 進 Hodge 理論のもっとも古い定理を、$J_{X_{\overline{K}}}$ に適用すると、次のような同型ができる：

$$\Delta_X^{\mathrm{ab}} \underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes} \mathbf{C}_p \cong \{D_X \underset{K}{\otimes} \mathbf{C}_p\} \oplus \{D_X^{\vee} \underset{K}{\otimes} \mathbf{C}_p(1)\}$$

ただし、$\mathbf{C}_p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \widehat{\overline{K}} = \overline{K}$ の p 進完備化で、$D_X \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^0(X_K, \omega_{X_K/K})$。一方、$X_K$ が non-hyperelliptic であるという仮定から、X_K の canonical bundle $\omega_{X_K/K}$ による標準的な埋め込みができる：

$$X_K \hookrightarrow P_X \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{P}(D_X)$$

従って、X_K と同じ仮定を満たす Y_K と、Γ_K の外作用と両立する同型

$$\Delta_X \cong \Delta_Y$$

が与えられたら、それぞれのアーベル化の間の同型

$$\Delta_X^{\mathrm{ab}} \cong \Delta_Y^{\mathrm{ab}}$$

ができ、更に、Hodge-Tate 分解を適用すると、同型

$$D_X = (\Delta_X^{\mathrm{ab}} \otimes \widehat{\overline{K}})^{\Gamma_K} \cong (\Delta_Y^{\mathrm{ab}} \otimes \widehat{\overline{K}})^{\Gamma_K} = D_Y$$

が引き起こされ、次のような図式ができる：

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{P}(D_X) & = & P_X & \cong & P_Y & = & \mathbf{P}(D_Y) \\
 & & \bigcup & & \bigcup & & \\
 & & X_K & \stackrel{?}{\dashrightarrow} & Y_K & &
\end{array}$$

つまり、P_X と P_Y という、それぞれの曲線の「標準的な入れもの」の間の同型が既にできていて、後は、$X_K \subseteq P_X$ という部分多様体が、$Y_K \subseteq P_Y$ に移るかどうかをみればよい。言い換えれば、$X_K \subseteq P_X$ という部分多様体を定義している様々な定義方程式＝関係式を、P_Y に移したとき、$Y_K \subseteq P_Y$ を定義する関係式たちのなすイデアルに入るかどうか、突き止めたいのである：

<u>問題</u>：X_K, Y_K を定義する関係式が、「$\cong$」で保たれるか？

このことを、以下では、**「関係式の保存」**と呼ぶことにする。以下の II., III. では、$D_X = H^0(X_K, \omega_{X_K/K})$ の元たち、つまり、微分たちの **(p 進) 解析的な表示**を用いて、「関係式の保存」を証明するのである。

II. p 進 Hodge 理論

(A.) 射影空間の間の射

先ほど I. の (D.) で、$\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大 K、その K 上の proper で non-hyperelliptic な双曲的曲線 X_K, Y_K、それから Γ_K の外作用と両立する、それぞれの pro-p 幾何的基本群の間の同型 $\Delta_X \cong \Delta_Y$ というデータから出発して、同型

$$D_X = (\Delta_X^{\mathrm{ab}} \otimes \widehat{\overline{K}})^{\Gamma_K} \cong (\Delta_Y^{\mathrm{ab}} \otimes \widehat{\overline{K}})^{\Gamma_K} = D_Y$$

（ただし、$D_X \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^0(X_K, \omega_{X_K})$、$D_Y \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^0(Y_K, \omega_{Y_K})$）を構成し、更にその同型から図式

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{P}(D_X) & = & P_X & \cong & P_Y & = & \mathbf{P}(D_Y) \\ & & \bigcup & & \bigcup & & \\ & & X_K & \stackrel{?}{\dashrightarrow} & Y_K & & \end{array}$$

ができることをみてきた。定理 1 を証明するためには、X_K と Y_K の間の同型を作らないといけないが、これをいうには、I., (D.) でも指摘したように、**「関係式の保存」**がいえれば十分である。本節では、この「関係式の保存」という表現の意味することを書き下し、次節の議論のための準備をしておきたい。

まずは、X_K を定義する**「関係式」**だが、関係式たちのなす空間は、各 $i \geq 1$ に対して定義されていて、記号で書けば、

$$\text{関係式たちのなす空間} = \mathcal{R}_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ker}(\overset{i}{\otimes}\, D_X \to D_X^i)$$

（ただし、

$$D_X^i \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^0(X_K, \omega_{X_K}^{\otimes i})$$

で、$\overset{i}{\otimes}\, D_X \to D_X^i$ は、line bundle の section の掛け算による自然な射）となる。一方、Y_K に対しても同様な射

$$\overset{i}{\otimes}\, D_Y \;\to\; D_Y^i$$

（ただし、$D_Y^i \overset{\mathrm{def}}{=} H^0(Y_K, \omega_{Y_K}^{\otimes i})$）が定義されていて、これらの記号で書けば、**「関係式の保存」**とは、

$\forall i \geq 1$, 合成

$$\mathcal{R}_i \ \subseteq \ \overset{i}{\otimes} D_X \xrightarrow{\sim} \overset{i}{\otimes} D_Y \ \to \ D_Y^i$$

は 0 になるか？

ということと同値である。

(B.) 上半平面の代替物の登場

「関係式の保存」を証明するためには、$\mathbf{C}$ 上の場合に上半平面が果たしたのと似たような役割を果たしてくれる「空間」を導入しなければならない。この「空間」を定義するためには、簡単のため、Y_K が、$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ 上で stable な曲線

$$\mathcal{Y} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$$

に伸びる（つまり、$\mathcal{Y} \otimes_{\mathcal{O}_K} K = Y_K$）ことを仮定する。なお、$\mathcal{Y}$ の special fiber $\mathcal{Y} \otimes_{\mathcal{O}_K} k$ （ここで、k は K の剰余体）の generic point $\mathfrak{p}$ が、一個与えてあるとする。すると、$\mathfrak{p}$ に対して、$\mathcal{Y}$ の $\mathfrak{p}$ での局所環を p 進完備化して、その最大不分岐拡大をとり、更にもう一回 p 進完備化すると、

$$\mathcal{O}_L \overset{\mathrm{def}}{=} (\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{Y},\mathfrak{p}}^{\mathrm{unram}})^\wedge$$

という離散付値環ができる。以下では、その環の商体を、L と書くことにする。その L には、p 進位相が入っているので、L の「連続な微分」

$$\Omega_L \overset{\mathrm{def}}{=} \{L\text{の連続な微分}\}$$

というものを定義することができる。L という体には、その親分の $\mathcal{Y}$ から譲り受けるちょうど一個だけの幾何的な次元があるので、

$$\dim_L(\Omega_L) = 1$$

となり、更に、L の構成から、同義反復的な射

$$\xi_Y : \mathrm{Spec}(L) \to \mathcal{Y}$$

ができる。この射 ξ_Y の像は、容易に確認できるように、$\mathcal{Y}$ の generic point になるので、ξ_Y で（多重）微分を引き戻すという射

$$D_Y^i \overset{\xi_Y^*}{\hookrightarrow} \Omega_L^{\otimes i}$$

（ただし、右のテンソル積は L 上でとる）は**単射**になる。従って、II., (A.) の議論を適用すると、

「関係式の保存」 $\Longleftrightarrow$ 合成 $(\overset{i}{\otimes} D_X \supseteq) \mathcal{R}_i \to D_Y^i \overset{\xi_Y^*}{\hookrightarrow} \Omega_L^{\otimes i}$ が 0 になる。

つまり、「関係式の保存」をいうには、

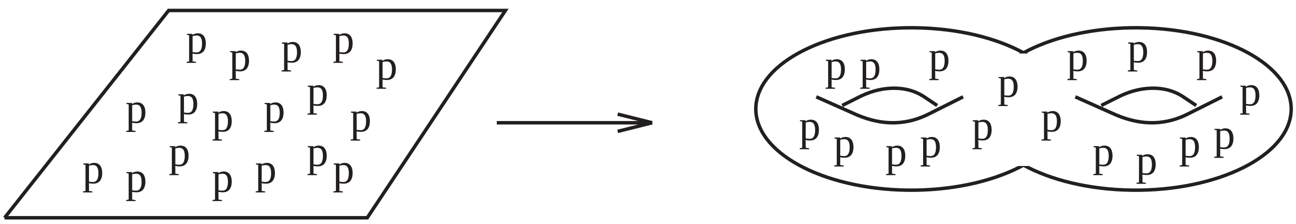
$$\overset{i}{\otimes} D_X \to \Omega_L^{\otimes i}$$

を**計算**して、その $\mathcal{R}_i \subseteq \overset{i}{\otimes} D_X$ への制限が 0 になることをいえば十分である。

<u>注</u>：

(i) $\mathbf{C}$ 上の場合との類似でいえば、先ほどの射 $D_Y \to \Omega_L$ を、「保型形式の**解析的展開**」とみることができる。つまり、$\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L)$ は**上半平面の役割**を果たしているのである。

(ii) 次節では、この展開を「π_1 の言葉」に翻訳して、$D_X \to \Omega_L$ を計算する方針である。



$\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L) \to \mathcal{Y}$

(iii) 実際、

$$\mathcal{O}_L \cong \{(\mathbf{Z}_p[t])^{\wedge,\ \mathrm{unram}}_{(p)}\}^{\wedge}$$

特に、$\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L)$ は、Y_K（のモジュライ）に**よらない**、幾何的次元 $= 1$ の幾何的対象になる。つまり、$\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L)$ は本当に Y_K を**「一意化」**（'「一意」の一 $\Longleftrightarrow$ Y_K のモジュライによらない'）しているのである。言い換えれば、「$\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L)$」という幾何的対象の同型類は、$Y_K$ から出発しようと、X_K から出発しようと、変わらないので、X_K と Y_K を**比較**するのに**「適任」**である。

(C.) Faltings の理論

先ほどの L と K に対して、「相対的なガロア群」

$$\Gamma_{L/K} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ker}(\Gamma_L \to \Gamma_K) = \Gamma_{L\cdot\overline{K}}$$

が定義されるが、そのガロア群のガロア・コホモロジーは、Faltings [F1] や兵藤治氏 ([H]) によって計算されている。以下で使う主な結果は、一次ガロア・コホモロジー群 $H^1(\Gamma_{L/K}, \widehat{\overline{L}}(1))$ と、L の微分加群 $\Omega_L \widehat{\otimes}_{K^{\mathrm{unr}}} \widehat{\overline{K}}$ の間に、自然でかつ Γ_K の作用と両立する同型

$$H^1(\Gamma_{L/K}, \widehat{\overline{L}}(1)) \cong \Omega_L \widehat{\otimes}_{K^{\mathrm{unr}}} \widehat{\overline{K}}$$

(ただし、$K^{\mathrm{unr}} \subseteq L$ は K の最大不分岐拡大）があるというものである。ここでは、同型自身の構成は復習しないが、$t \in L$ が、K 上の幾何的な次元のパラメータなら、この同型は、大雑把にいうと、dt/t という、パラメータ t の log 微分と、$\{t^{\frac{1}{p^n}}\}_{n\geq 1}$ という、t の p 巾乗根を添加することによって得られる L の拡大体の塔の間の対応である：

$$\{t^{1/p^{\infty}}\} \quad \leftrightarrow \quad (dt/t)$$

（注：両辺とも $L \widehat{\otimes}_{K^{\mathrm{unr}}} \widehat{\overline{K}}$ という大きな体上の 1 次元ベクトル空間である。）この対応は、実はパラメータ t の取り方にもよらず、ガロアの作用とも両立する自然なものになる。しかも、この同型は Faltings ([F1]) の p 進 Hodge 理論の基礎にもなっていて、実際、任意の（ある技術的な条件を満たす）p 進局所体上の多様体の**「比較同型」**（＝その同型の存在は p 進 Hodge 理論の主な定理）は、ちょうど上のような同型を、多様体上局所的に、十分に小さいアフィンに

対して作っておいて、それらの諸々の局所的なものを（いわゆる 'general nonsense' を使って）貼り合わせることによって構成するのである。例えば、先ほど I., (D.) の話に出てきたアーベル多様体の **Hodge-Tate 分解**を、元の Tate 手法ではなく、Faltings の手法によって証明すると、この**「比較同型」の特別な場合**に当たる。 従って、Hodge-Tate 分解より生じる射と、先ほどの $\Gamma_{L/K}$ のコホモロジーに関する同型は両立していて、次のような**可換な図式**が成り立つ：

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Delta_Y, \widehat{\overline{K}}(1))^{\Gamma_K} & \to & H^1(\Gamma_{L/K}, \widehat{\overline{L}}(1)) \\ \| & & \uparrow\wr \\ D_Y & \to & \Omega_L \widehat{\otimes}_{K^{\mathrm{unr}}} \widehat{\overline{K}} \end{array}$$

この図式によって、II., (B.) の話に出てきた**微分形式の展開写像** $D_Y \to \Omega_L$ が完全に**「π_1」（＝'基本群'）の言葉**に翻訳されたことになる。 次に、上の図式を、与えられた同型 $\Delta_X \cong \Delta_Y$ に引き起こされる図式

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Delta_X, \widehat{\overline{K}}(1))^{\Gamma_K} & \xrightarrow{\sim} & H^1(\Delta_Y, \widehat{\overline{K}}(1))^{\Gamma_K} \\ \| & & \| \\ D_X & \xrightarrow{\sim} & D_Y \end{array}$$

の右に並べると、次のような図式ができる：

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\Delta_X, \widehat{\overline{K}}(1))^{\Gamma_K} & \xrightarrow{\sim} & H^1(\Delta_Y, \widehat{\overline{K}}(1))^{\Gamma_K} & \to & H^1(\Gamma_{L/K}, \widehat{\overline{L}}(1)) \\ \| & & \| & & \uparrow\wr \\ D_X & \xrightarrow{\sim} & D_Y & \to & \Omega_L \widehat{\otimes}_{K^{\mathrm{unr}}} \widehat{\overline{K}} \end{array}$$

ところが、この新しい図式の下の行の合成（の i 回テンソル積）はちょうど、II., (B.) の話で、関係式の保存を証明するのに計算する必要があると述べたもので、一方、上の行の合成は完全に π_1 の言葉で書かれている。

さて、II., (B.) で構成した同義反復的な L- 有理点 $\xi_Y : \mathrm{Spec}(L) \to Y_K$ が引き起こす数論的基本群の間の射

$$\alpha_Y \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1(\xi_Y) : \Gamma_L \to \Pi_{Y_K}$$

と、与えられた同型 $\Pi_{Y_X} \cong \Pi_{X_K}$ の合成を

$$\alpha_X : \Gamma_L \to \Pi_{X_K}$$

と書くと、条件

$$(*^{\mathrm{geom}})\ \alpha_X \text{ が、} {}^{\exists}\ \xi_X : \mathrm{Spec}(L) \to X_K \text{ から生じる。}$$

が満たされるかどうかを問うことができる。

もし条件 $(*^{\mathrm{geom}})$ が成立すれば、先ほどの「合成可換図式」

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Delta_X, \widehat{\overline{K}}(1))^{\Gamma_K} & \to & H^1(\Gamma_{L/K}, \widehat{\overline{L}}(1)) \\ \| & & \uparrow \wr \\ D_X & \to & \Omega_L \widehat{\otimes}_{K^{\mathrm{unr}}} \widehat{\overline{K}} \end{array}$$

の下の行が、Faltings の理論の**関手性**より、$\xi_X \in X_K(L)$ から生じることになる。 ところが、この点 $\xi_X \in X_K(L)$ の、標準的埋め込み $X_K \hookrightarrow P_X$ に関する射影座標は正に上の図式の下の行になっていて、この点が、単なる射影空間の点であるだけでなく、部分多様体 $X_K \subseteq P_X$ にのっている点であるということから、部分多様体を定義する関係式たちを ξ_X に制限したら 0 になることが直ちに従い、よって、$\xi_X^*(\mathcal{R}_i) = 0$ が帰結される。この帰結と、II., (B.) の議論を組み合わせると、これで**「関係式の保存」が証明された**ことになる。即ち、

$$(*^{\mathrm{geom}}) \text{ 成立} \Longrightarrow \text{「関係式の保存」成立}$$

が言えたことになる。つまり、主定理の証明を完成するには、後、$(*^{\mathrm{geom}})$ を示せば十分である。

(D.) J- 幾何性

次に、$(*^{\mathrm{geom}})$ ($\Longleftrightarrow$ $\{\alpha_X$ の幾何性$\}$) の証明に入りたいが、これを直接証明するのは少々難し過ぎるので、以下のような間接的な論法に訴える。まず、曲線 X_K の **Albanese 多様体**を、$J^{(1)}_{X_K}$ という記号で表すことにする。一般に、

曲線の「Albanese 多様体」とは、その曲線のヤコビ多様体上の ‘torsor ’（＝はっきりした「原点」がないということ以外に、ヤコビ多様体と「同じ形をした」多様体になる）で、曲線からそれを値域とする自然な射

$$X_K \to J^{(1)}_{X_K}$$

があり、しかも、この射は、曲線から「アーベル多様体の形をした」多様体への射の中で「最小」のものとなる。この射によって、Albanese 多様体の (pro-p) 幾何的基本群と、X_K の (pro-p) 幾何的基本群のアーベル化の間の自然な同型が引き起こされ、従って Albanese 多様体の数論的基本群は次のような完全系列

$$1 \to \Delta_X^{\mathrm{ab}} \to \Pi_{J^{(1)}_{X_K}} \to \Gamma_K \to 1$$

に入る。

さて、次に、問題の α_X と、上の曲線から Albanese への射に引き起こされる数論的基本群の間の射の**合成**

$$\alpha_X^J: \quad \Gamma_L \quad \xrightarrow{\alpha_X} \quad \Pi_{X_K} \quad \longrightarrow \quad \Pi_{J^{(1)}_{X_K}}$$

というものを考えたいのだが、α_X 自身の幾何性をそう容易に証明できなくても、この合成 α_X^J の幾何性（$= {}^\exists ? \in J^{(1)}_{X_K}(L)$ から生じる）は比較的直接的に証明できる。α_X^J の幾何性を、以下では、α_X の **J- 幾何性**と呼ぶことにする。本節と次節では、α_X の **J- 幾何性**の証明を紹介する。

α_X^J の幾何性は、二つのステップに分けて証明する：

(i) 幾何的な（$= {}^\exists ? \in Y_K(K)$ から生じる）

$$\beta_Y : \Gamma_K \to \Pi_{Y_K}$$

に対して、（α_Y から α_X^J を構成したときに行なったのと同じ操作を行なうことによって）準同型

$$\beta_X^J : \Gamma_K \to \Pi_{Y_K} \cong \Pi_{X_K} \to \Pi_{J^{(1)}_{X_K}}$$

を構成することができるが、次節で詳しく説明するこのステップでは、この準同型 β_X^J の**幾何性**を示す。

(ii) 二つの準同型 $\alpha_X^J, (\beta_X^J)|_{\Gamma_L} : \Gamma_L \to \Pi_{J_{X_K}^{(1)}}$ の差は、あるコホモロジー類

$$“\alpha_X^J - \beta_X^J” \in \mathrm{Im}(H^1(\Gamma_L, \Delta_Y^{\mathrm{ab}})) \subseteq H^1(\Gamma_L, \Delta_X^{\mathrm{ab}})$$

を定義するが、このステップでは、この**「差」**が、ある適当な意味で、**幾何的**なものから生じることを証明する。（このステップについては、本節で詳しく説明する。）

この (i) と (ii) ができれば、α_X^J が、β_X^J と差 “$\alpha_X^J - \beta_X^J$” という二つの幾何的なものの和という形に書けることになるので、それで、α_X^J 自身の幾何性が帰結される。

それでは、(ii) を証明しよう。まず、「Tate の定理」より、ガロアの作用と両立する同型 $\Delta_X^{\mathrm{ab}} \cong \Delta_Y^{\mathrm{ab}}$ が、必ずそれぞれのヤコビ多様体に付随する**形式群の間の同型**

$$\text{Formal gp.}(J_{X_K}) \cong \text{Formal gp.}(J_{Y_K})$$

から生じることが分かる。ところが、$\Delta_Y \cong \Delta_X$ という**抽象的**な（＝幾何的な $X_K \cong Y_K$ から生じるかどうか定かでない）同型を施す**以前**の段階の差

$$“\alpha_Y^J - \beta_Y^J” \in H^1(\Gamma_L, \Delta_Y^{\mathrm{ab}})$$

は、二つの（定義上）幾何的なもの α_Y^J, β_Y^J の差だから、（同義反復的に）幾何的になる。従って、この幾何的な差＝コホモロジー類を、形式群という解析的な多様体のようなものの間の射（＝（少なくとも解析的には）幾何的な世界のもの）で送れば、出てくるもの

$$= \ \text{差} \ “\alpha_X^J - \beta_X^J” \in \mathrm{Im}(H^1(\Gamma_L, \Delta_Y^{\mathrm{ab}})) \subseteq H^1(\Gamma_L, \Delta_X^{\mathrm{ab}})$$

も当然幾何的になる。これで、ステップ (ii) の証明が終わる。

(E.) Malčev 完備化の p 進 Hodge 理論

今度は、（幾何的に生じる）準同型

$$\beta_Y : \Gamma_K \to \Pi_{Y_K}$$

について考えよう。この準同型は、完全系列

$$1 \to \Delta_Y \to \Pi_{Y_K} \to \Gamma_K \to 1$$

の**分裂**を定義するが、その分裂によって、Γ_K を、Π_{Y_K} の部分群と思うことができ、その部分群の元で正規部分群 $\Delta_Y \subseteq \Pi_{Y_K}$ を共役することによって、Δ_Y への Γ_K の**作用**

$$\Gamma_K \overset{\beta_Y}{\curvearrowright} \Delta_Y$$

が定義される。つまり、Γ_K の Δ_Y への**外作用**は、ずっと前からあったが、今度の作用は、'内部自己同型を除いて' のものではなく、（前からあった外作用を引き起こす）歴とした（＝普通の意味での）作用なのである。

次に、Δ_Y の（二次の）**Malčev 完備化**を考えたい。pro-p 群 Δ_Y の商

$$\Delta_Y/[\Delta_Y, [\Delta_Y, \Delta_Y]]$$

（ただし、[?, ??] とは、? の元と、?? の元の交換子たちで生成される部分群のこと）は、実は、（$\mathbf{Q}_p$ とテンソルさえすれば）$\mathbf{Q}_p$ 上の自然な**巾単代数群**としての構造を備えているが、その代数群のことを Δ_Y の（二次の）「Malčev 完備化」という。ここでは、その巾単代数群に対応する巾零の Lie 環を、$\mathbf{Q}_p$ から $\widehat{\overline{K}}$ という体に base change して、更に、その base change したものの**「weight 0 の商」**というものを考えたい。この「weight 0 の商」というものの構成はここでは詳しくは紹介しないが、大雑把に説明すると次のようなものである：

「weight 0 の商」を取る前の Malčev 完備化（の Lie 環）には、ガロアの作用に保たれる様々な自然な部分商があり、その部分商たちは、全部、ガロア加群として、$\widehat{\overline{K}}, \widehat{\overline{K}}(1), \widehat{\overline{K}}(2)$（注：括弧内の数字は「Tate twist」＝円分指標でその数字の回数だけひねったもの）のようなものに同型になるが、**「weight 0 の商」**というものは、元の Malčev 完備化（の Lie 環）の（ガロアの作用に保たれる）商で、ガロア加群として $\widehat{\overline{K}}$ に同型な部分商しかあらわれない（つまり、$\widehat{\overline{K}}(1)$ や $\widehat{\overline{K}}(2)$ に同型な部分商がない）ものの中で最大のものとして定義される。

この「weight 0 の商」には、先ほどの $\Gamma_K \overset{\beta_Y}{\curvearrowright} \Delta_Y$ に引き起こされる自然な Γ_K- 作用があり、そうしてできる $\widehat{\overline{K}}[\Gamma_K]$- 加群を、以下では、$\mathcal{Z}_Y$ で表すこ

とにする。この $\widehat{\overline{K}}[\Gamma_K]$- 加群 $\mathcal{Z}_Y$ は、次のような $\widehat{\overline{K}}[\Gamma_K]$- 加群の完全系列に入る：

$$0 \to \wedge^2\ D_Y \otimes_K \widehat{\overline{K}} \to \mathcal{Z}_Y \to D_Y \otimes_K \widehat{\overline{K}} \to 0$$

なお、$\mathcal{Z}_Y$ には、$\widehat{\overline{K}}[\Gamma_K]$- 加群の構造の他にも、$\widehat{\overline{K}}$ 上の Lie 環としての構造も入る。ところが、Bloch- 加藤 ([BK]) の理論と、ある簡単な計算を使うと、次のような同値が言える：

$$\{\beta_Y の\ \mathrm{J}\text{- 幾何性}\} \Longleftrightarrow \{\ \mathcal{Z}_Y\ が\ 分裂する\ \}$$

（ただし、右辺 $\stackrel{\mathrm{def}}{=}$「上の $\widehat{\overline{K}}[\Gamma_K]$- 加群の完全系列が**分裂**する」。）一方、$\beta_Y$ や β_X の定義より、次のような同型ができる：

$$\{\Gamma_K \stackrel{\beta_Y}{\curvearrowright} \Delta_Y\} \quad \cong \quad \{\Gamma_K \stackrel{\beta_X}{\curvearrowright} \Delta_X\}$$

なお、Δ_Y から $\mathcal{Z}_Y$ を作る (または同様な操作によって、Δ_X から、その「weight 0 の商」$\mathcal{Z}_X$ を作る）という操作は、**自然**な操作なので、上の同型から、次のような（それぞれの Γ_K の作用と両立する）同型が導かれる：

$$\mathcal{Z}_Y \quad \stackrel{\Gamma_K}{\cong} \quad \mathcal{Z}_X$$

従って、この同型と、上の同値 '$\Longleftrightarrow$'（注：この同値は、β_X に対しても成り立つ）を組み合わせると、

$$\{\beta_Y\ の\ \mathrm{J}\text{- 幾何性}\ \} \Longleftrightarrow \{\beta_X\ の\ \mathrm{J}\text{- 幾何性}\ \}$$

が帰結され、一方、β_Y^J の幾何性は元々知っているものなので、これで、β_X^J も幾何的になることが示されたことになる。つまり、これで、II., (D.) の (i) の証明が完結する。

III. 有理点の構成

(A.) J- 幾何性と Chern 類

これまでの議論では、幾何的に生じる準同型

$$\alpha_Y \overset{\text{def}}{=} \pi_1(\xi_Y) : \Gamma_L \to \Pi_{Y_K}$$

と、与えられた同型 $\Pi_{Y_K} \cong \Pi_{X_K}$ から、合成

$$\alpha_X : \Gamma_L \to \Pi_{X_K}$$

を作り、更に、それと、Albanese 多様体への射に引き起こされる数論的基本群の間の射との合成

$$\alpha_X^J : \Gamma_L \to \Pi_{X_K} \to \Pi_{J^{(1)}_{X_K}}$$

の幾何性を示した。従って、（基本群をとるという操作と、L または Γ_L 上のファイバー積をとるという操作が、互いに可換するという事実を使えば）**合成**

$$(\mathrm{id}, \alpha_X^J) : \Pi_{X_L} \quad \overset{(\mathrm{id}, \alpha_X)}{\longrightarrow} \quad \Pi_{X_L \times_L X_L} \quad \longrightarrow \quad \Pi_{X_L \times_L J^{(1)}_{X_L}}$$

（ただし、二番目の矢印は、X_L の恒等写像と、自然射 $X_L \to J^{(1)}_{X_L}$ から生じる射の直積）も**幾何的**であることが帰結される。

次に、幾つかの line bundle とその Chern 類を考えたいのだが、まず、多様体 $X_L \times_L X_L$ の中に、「対角」

$$\text{diagonal } X_L \subseteq X_L \times_L X_L$$

が divisor として入っていることに注意しよう。従って、この divisor は、曲面 $X_L \times_L X_L$ 上の line bundle を定めていて、Kummer exact sequence の連結準同型 $H^1_{\text{et}}(X_L \times_L X_L, \mathcal{O}^\times) \to H^2_{\text{et}}(X_L \times_L X_L, \mathbf{Z}_p(1))$ を施すと、その（一次）Chern 類

$$c_1(\text{diagonal}) \in H^2(\Pi_{X_L \times_L X_L}, \mathbf{Z}_p(1))$$

が定義される。一方、初等的代数幾何から、この diagonal が定めている line bundle が、有理数係数さえ許せば、$X_L \times_L J^{(1)}_{X_L}$ 上の line bundle の（写像 (id, 自然射) :

$X_L \times_L X_L \to X_L \times_L J^{(1)}_{X_L}$ による）**引き戻し**として生じることが知られている。従って、これらの line bundle に対して Chern 類写像を施すと、

$$\begin{aligned} c_1(\text{diagonal}) \quad &\in \mathbf{Q} \cdot \text{Im}\{c_1(\mathcal{M}) \in \quad H^2(\Pi_{X_L \times_L J^{(1)}_{X_L}}, \mathbf{Z}_p(1))\} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \subseteq H^2(\Pi_{X_L \times_L X_L}, \mathbf{Q}_p(1)) \end{aligned}$$

（ただし、「Im」とは、先ほどの「引き戻し」という写像の像のこと。）すると、

$$\eta_X \stackrel{\text{def}}{=} (\text{id}, \alpha_X)^* c_1(\text{diagonal}) \in H^2(\Pi_{X_L}, \mathbf{Z}_p(1))$$

という類を定義すると、η_X も、$\mathbf{Q}_p$ 係数さえ許せば、$X_L \times_L J^{(1)}_{X_L}$ 上の line bundle の Chern 類の（今度は、写像 (id, α^J_X) による）引き戻しとして生じることが分かる。ところが、上で説明したように、(id, α^J_X) の**幾何性は既に言えている**ので、これで分かったことは、類 η_X が、$\mathbf{Q}_p$ 係数さえ許せば、**幾何的に**（$=$ $^\exists$ line bundle の Chern 類として）生じるということである。更に、この事実の意味することを、Kummer exact sequence を使って書き下してみると、類 η_X を、

$$\eta_X = c_1(^\exists \mathcal{L}) + \text{torsion}$$

（ただし、$\mathcal{L}$ は X_L 上の line bundle）という形に書けることが分かる。

このことの意味は、次の通りである：上では、$\alpha_X : \Gamma_L \to \Pi_{X_K}$ という抽象的な（=幾何的に生じるかどうか定かでない）準同型を作っておいて、それを生じさせる**有理点 $\xi_X \in X_K(L)$ を構成する**ことが議論の目的（II., (C.) の $(*^{\text{geom}})$ を参照）なのだが、先ほどの議論で問題にした類 η_X は、もしそのような有理点 ξ_X が存在した場合、ちょうどその有理点 ξ_X が定義する X_L 上の divisor の Chern 類になるもの、つまり、

$$\eta_X = \text{「人工的な} c_1(\mathcal{O}_{X_L}(\xi_X))\text{」}$$

なのである。従って、η_X が、torsion を除いて、X_L の line bundle から生じることが分かったということは、ξ_X の構成に一歩近付いたということである。実際、以下の議論では、正にこの事実を使って、有理点を構成する方針なのである。

まず、類 η_X を、「次数写像」$H^2(\Pi_{X_L}, \mathbf{Z}_p(1)) \to H^2(\Delta_X, \mathbf{Z}_p(1)) = \mathbf{Z}_p$（= line bundle の Chern 類に施したら、その line bundle の degree を与える

写像）で送ったら、次数が1になることは、η_X の構成から簡単に証明されるので、（torsion の次数が必ず0になるということを使えば）$\mathcal{L}$ の次数も1になることが分かる。つまり、これで、X_L **上に $\mathbf{deg} = 1$ の line bundle が存在する**ことが言えたことになる。すると、大きくて p と素な自然数 m に対して、その line bundle の m 回テンソル巾をとると、very ample な line bundle $\mathcal{L}^{\otimes m}$ ができ、従って、初等的代数幾何からすぐ分かるように、

$$\mathcal{L}^{\otimes m} = \mathcal{O}_{X_L}(D)$$

となるような L 上étale な divisor

$$D = \bigcup \mathrm{Spec}(L_i) \quad \subseteq X_L$$

（ただし、$\forall i,\ [L_i : L] < \infty$）が存在する。ところが、$\deg(D) = \deg(\mathcal{L}^{\otimes m}) = m$ なので、

$$([{}^{\exists} L_i : L], p) = 1$$

となるような i が、少なくとも一個存在することになる。しかし、初等的局所体論からすぐ分かるように、このような拡大 L_i/L の分岐は、必ず **tame** になる！ つまり、

$$X_K(L^{\mathrm{tm}}) \neq \emptyset$$

（ただし、L^{tm} は L の最大 tame 拡大）が言えたわけである。言い換えれば、まだ L ではなく L^{tm} というもっと大きな体の上でしか定義されていないし、α_X を発生するかどうかも分からないとはいえ、やっと**有理点を構成できた**のである。

実は、上の議論を、$\xi_Y \in Y_K(L)$ から出発して行なったわけだが、「非退化」というかなり一般的な技術的条件さえ満たしていれば、この議論を、任意の点 $\in Y_K(L)^{\text{非退化}}$ に対して行なうことができる。つまり、次 のようなことが言えたわけである：

$$\underline{\text{結論}}：\ Y_K(L)^{\text{非退化}} \neq \emptyset \Longrightarrow X_K(L^{\mathrm{tm}}) \neq \emptyset$$

(B.) 収束の設定

準同型 $\alpha_{Y_L} : \Gamma_L \to \Pi_{Y_L}$ （$= \alpha_Y : \Gamma_L \to \Pi_{Y_K}$ が定める $\Pi_{Y_L} = \Pi_{Y_K} \times_{\Gamma_K} \Gamma_L$ への射）から出発して、$\forall\ i\ \geq\ 0$ に対して、次のような部分群が定義される：

$$H_{Y^i} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathrm{Image}(\alpha_{Y_L})) \cdot \Delta_Y^{<i>} \subseteq \Pi_{Y_L}$$

ただし、任意の pro-p 群 Δ に対して、次の記号を用いる：

$$\Delta^{<0>} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Delta; \qquad \Delta^{<i+1>} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\Delta^{<i>})^p \cdot [\Delta^{<i>}, \Delta^{<i>}]$$

（つまり、$\Delta^{<i>} \to \Delta^{<i>}/\Delta^{<i+1>}$ は、$\Delta^{<i>}$ のアーベルでかつ p を掛けたら 0 になるような商の中で、最大のもの。）すると、射影 $\Pi_{Y_L} \to \Gamma_L$ を部分群 H_{Y^i} に制限することによってできる射 $H_{Y^i} \to \Gamma_L$ は全射になるので、H_{Y^i} に対応する Y_L の有限次エタール被覆 $Y_L^i \to Y_L$ は連結になり、次のような**連結な有限次エタール被覆の塔**ができる：

$$\ldots \to Y_L^{i+1} \to Y_L^i \to \ldots \to Y_L$$

同様に、$\alpha_{X_L} : \Gamma_L \to \Pi_{X_L}$ （$= \alpha_X : \Gamma_L \to \Pi_{X_K}$ が定める $\Pi_{X_L} = \Pi_{X_K} \times_{\Gamma_K} \Gamma_L$ への射）に対して、部分群 $H_{X^i} \subseteq \Pi_{X_L}$ やそれに対応する被覆の塔が定義される：

$$\ldots \to X_L^{i+1} \to X_L^i \to \ldots \to X_L$$

元の Y_L 上の被覆の塔に戻ろう。準同型 $\alpha_Y = \pi_1(\xi_Y)$ は**幾何的**（=「$\xi_Y \in Y_L(L)$ という有理点から生じる」）で、

$$\mathrm{Image}(\alpha_{Y_L} : \Gamma_L \to \Pi_{Y_L}) \subseteq H_{Y^i}$$

という二つの事実の意味をよく考えてみると、定義から、それはとりもなおさず、有理点 $\xi_Y \in Y_L(L)$ が Y_L^i の（特定の）自然な L- 有理点

$$\xi_Y^i \in Y_L^i(L)$$

に持ち上がることを意味していることが分かる。しかも、ξ_Y 自身が「非退化」（III., (A.) の最後の議論を参照）であることから、ξ_Y^i も「非退化」になることを直ちに帰結でき、そのことを踏まえて III., (A.) の**「結論」**を適用すると、

$$\forall\, i \geq 0,\ X_L^i(L^{\mathrm{tm}}) \neq \emptyset$$

が帰結されることが分かる。

この時点では、最終的な目標である、α_X を発生させる有理点 $\in X_K(L)$ の構成にはまだ至っていないが、上の議論によって分かることは、少なくとも、L^{tm}- 有理点の列

$$\xi_{X^i}^i \in X_L^i(L^{\mathrm{tm}}); \quad \xi_X^i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Image}_X(\xi_{X^i}^i) \in X_L(L^{\mathrm{tm}})$$

（ただし、i はすべての負でない整数を走り、「$\mathrm{Image}_X(?)$」とは、「? という X_L の被覆の有理点の X_L における像」のこと）が作れるということである。ところが、以下の「収束定理」によると、問題の「α_X を発生させる有理点 $\in X_K(L)$ の構成」には、これだけでも十分である：

<u>収束定理</u>：このような状況の下、任意の有理点の列 $\{\xi_{X^i}^i \in X_L^i(L^{\mathrm{tm}})\}$（ただし、$i$ はすべての負でない整数を走る）に対して、$\xi_X^i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Image}_X(\xi_{X^i}^i) \in X_L(L^{\mathrm{tm}})$ と定義しておくと、

$$\Downarrow$$

有理点たち ξ_X^i は、$\alpha_X = \pi_1(\xi_X)$ となるような有理点

$$\xi_X \in X_L(L) \subseteq X_L((L^{\mathrm{tm}})^\wedge)$$

（ここに、$(L^{\mathrm{tm}})^\wedge$ とは、L^{tm} の p 進完備化のこと）に p 進収束する。

<u>注</u>:

(i) この定理の証明は次節で紹介する。

(ii) この収束定理が確立されると、II., (C.) の $(*^{\mathrm{geom}})$ の証明が完結し、従って、定理 1 の証明も完結するが、証明は長くて複雑なので、以下の III., (D.) で、もう一回復習する。

(iii) このように被覆の塔を組織的に利用するという手法は、Anderson-伊原や中村の仕事にまで遡り、ここでは、玉川の証明にやや近い形で用いている。ただし、玉川の場合、基礎体が**有限体**のため、収束は自動的である。つまり、p 進 Hodge 理論のような難しい理論の力を借りて上の「収束定理」のようなものを証明する必要はなかった。

(C.) 収束の証明

次の可換図式に注意しよう：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_{X^i} & & \\
 & & \| & & \\
\Gamma_L & \xrightarrow{\pi_1(\xi^i_{X^i})} & \Pi_{X^i_L} & \longrightarrow & \Gamma_L \\
\| & & \bigcap & & \text{“}\alpha_X\text{”} \downarrow \\
\Gamma_L & \xrightarrow{\pi_1(\xi^i_X)} & \Pi_{X_L} & \longrightarrow & \Pi_{X_L}/\Delta_X^{<i>}
\end{array}$$

（ただし、図式の右側の二つの矢印は自然な射影、真中の（横の）行の合成は id_{Γ_L}、記号“α_X”は、準同型 $\alpha_{X_L} : \Gamma_L \to \Pi_{X_L}$ を、modulo $\Delta_X^{<i>}$ で見たものを表すとする。） この図式のすべての射は自然なものなので、その可換性は、登場する対象たちの定義や、基本群という関手の関手性から直ちに出る。

次に、この可換図式の意味だが、言い換えれば、この可換図式の言おうとしていることは、<u>modulo</u> $\Delta_X^{<i>}$ では、

$$\text{“}\alpha_X\text{”} \equiv \pi_1(\xi^i_X) : \Gamma_L \to \Pi_{X_L}$$

ということである。つまり、例えばもし仮に $i = \infty$ だったとすると、Faltings の理論の関手性、即ち II., (C.) の可換図式

$$\begin{array}{ccc}
H^1(\Delta_X, \widehat{\overline{K}}(1)) & \xrightarrow{\pi_1(\xi^i_X)^*} & H^1(\Gamma_{L/K}, \widehat{\overline{L}}(1)) \\
\bigcup & & \|\wr \\
D_X \otimes_K \widehat{\overline{K}} & \xrightarrow{d\xi^i_X} & \Omega_L \widehat{\otimes}_{K^{\mathrm{unr}}} \widehat{\overline{K}}
\end{array}$$

の**上の行**が、（α_X^* に）完全に決まってしまい、従って、問題の有理点 $\xi_X^{i=\infty} \in X_K(L^{\mathrm{tm}})$ の P_X における射影座標（＝**下の行**）も、**完全に決まる**ことになる。ところが、写像 $X_K \hookrightarrow P_X$ は**埋め込み**なので、これで有理点 $\xi_X^{i=\infty} \in X_K(L^{\mathrm{tm}})$ 自身も完全に決まることになる。

勿論、実際には、$i \neq \infty$ だが、Faltings の理論には、II., (C.) で紹介した「$\mathbf{Q}_p$ 版」の他にも、「modulo p^N 版」が有り、しかも、その N（＝正の整数）が動くとき、Faltings の理論から生じる様々な同型や射も p 進的に連続に連動する。従って、この Faltings の理論の**「p 進的連続性」**より、各（有限な）$i \geq 0$ に対して先ほどの基本群の図式から出る帰結

$$“\alpha_X” \equiv \pi_1(\xi_X^i) : \Gamma_L \to \Pi_{X_L} \text{ modulo } \Delta_X^{<i>}$$

は、即ち、（上の p 進 Hodge 理論の図式の「modulo p^N 版」を適用すると）次のことを言っていることになる：

$$\xi_X^i \text{ の射影座標も、mod } p^{i-\exists c} \text{ で決まる。}$$

（ただし、c は、i によらない。） ところが、写像 $X_K \hookrightarrow P_X$ が埋め込みであるという事実をもう一回適用すると、上の議論によって、点列 $\{\xi_X^i\}$ が **p 進的に収束する**ことが言えたことになる。つまり、その点列の極限となる点

$$\xi_X \in X_L((L^{\mathrm{tm}})^\wedge)$$

が只一つ存在するということである。「収束定理」の証明を完成するためには、この極限 ξ_X について、あと幾つかの性質（＝例えば、α_X を発生させること、L 上で定義されていることなど）を証明しないといけないが、ここでは、詳細は省略するが、これらの性質も、上と同様な（p 進 Hodge 理論の）議論から従うのである。（詳しくは、[M2] を参照。）

(D.) 主定理の証明

定理 1 の証明はこれで終わったわけだが、途中で道に迷いやすい、長くて込み入った証明だったので、最後に、証明全体をもう一度振り返ってみたいと思う。まず、定理の statement を思い出しておこう：

定理 1: K は劣 p 進体、X_K は双曲的代数曲線 $/K$、S_K は滑らかな代数多様体 $/K$ とする。すると、自然な射たち

$$X_K(S_K)^{\mathrm{dom}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\Gamma_K}(\pi_1(S_K), \pi_1(X_K))$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\Gamma_K}(\Pi_{S_K}, \Pi_{X_K})$$

は全単射になる。ただし、$X_K(S_K)^{\mathrm{dom}}$ とは、定数射にならない（$\iff$ "dominant" な）K 上のスキーム射たち $S_K \to X_K$ 全体のなす集合で、$\mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{\Gamma_K}(?,?)$ とは、一つ目の「?」から二つ目の「？」への開（＝開集合を開集合に写すような）で連続な準同型で、それぞれの「？」の Γ_K への射影と両立するものの（X_K の幾何的基本群による共役の作用に関する）同値類全体を表すとする。

証明： まず、K が $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大の場合に、定理が（殆んど）直ちに帰着されるので、その場合に集中することにする。K が $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大でないと、証明のかなめである p 進 Hodge 理論が使用不可能になる。なお、簡単のため、X_K と $S_K = Y_K$ が両方とも proper でかつ non-hyperelliptic な**双曲的曲線**であると仮定しよう。

定理 1 を証明するためには、二つの自然な射が全単射になることを言わないといけないが、これを言うには、その二つの射の合成が全単射になることを言えれば、（ある簡単な議論から）十分なので、以下では、そのことを証明することにする。合成が全単射になるということは、右辺の元、つまり、（幾つかの条件を満たす）任意の準同型 $\Pi_{Y_K} \to \Pi_{X_K}$ が、只一つの幾何的な射 $Y_K \to X_K$ から生じるということだが、単射性は、比較的初等的でかつ古典的に知られている議論から従うので、ここでは、**全射性**、つまり、そういう射 $Y_K \to X_K$ の**存在**の証明に専念することにする。更に、（簡単のために）与えられた準同型が、任意の open な準同型ではなく、ガロアの作用と両立する

$$\text{同型}\ \Gamma_K \curvearrowright \Delta_X \cong \Delta_Y$$

（$\iff$ $\Pi_{X_K} \cong \Pi_{Y_K}$ で、Γ_K への射影と両立するもの）であると仮定しよう。定理を証明するためには、この同型が、曲線たちの間の同型 $Y_K \cong X_K$ から生じることを示さなければならない。つまり、**同型** $Y_K \cong X_K$ を**構成**しなければならない。

とにかく、与えられた同型 $\Delta_X \cong \Delta_Y$ から出発して、「Hodge-Tate 分解」を適用すると、K- ベクトル空間の間の同型

$$D_X = (\Delta_X^{\mathrm{ab}} \otimes \widehat{\overline{K}})^{\Gamma_K} \cong (\Delta_Y^{\mathrm{ab}} \otimes \widehat{\overline{K}})^{\Gamma_K} = D_Y$$

（ただし、$D_X \overset{\mathrm{def}}{=} H^0(X_K, \omega_{X_K})$、$D_Y \overset{\mathrm{def}}{=} H^0(Y_K, \omega_{Y_K})$）や付随する射影空間 $P_X \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbf{P}(D_X)$, $P_Y \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbf{P}(D_Y)$ の間の同型が導かれる。ところが、曲線が両方とも non-hyperelliptic であるという仮定から、それぞれの射影空間の中に X_K と Y_K が canonical に埋め込まれるので、問題は、先ほどの射影空間の間の同型が、それぞれの曲線（＝射影空間の中の部分多様体と見る）を互いに写すかどうか、つまり、曲線という部分多様体を定義する関係式たちを保つかどうか＝**「関係式の保存」**、ということになる：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{P}(D_X) & = & P_X & \cong & P_Y & = & \mathbf{P}(D_Y) \\ & & \bigcup & & \bigcup & & \\ & & X_K & \overset{?}{\dashrightarrow} & Y_K & & \end{array}$$

この「関係式の保存」を証明するためには、$\mathbf{C}$ 上の理論（I., (A.), (D.) を参照) で**上半平面 $\mathfrak{H}$** が果たしたのと似たような役割を果たしてくれるものを導入しなければならない。ここでは、曲線 Y_K に対してそのようなものを作るのだが、簡単のため、Y_K が $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ 上の stable model $\mathcal{Y} \to \mathcal{O}_K$ に伸びることを仮定する。次に、$\mathcal{Y}$ の special fiber の generic point $\mathfrak{p}$ を（補助に）選んでおいて、

$$L \overset{\mathrm{def}}{=} (\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{unram}}_{\mathcal{Y},\mathfrak{p}})^{\wedge} \text{ の商体}$$

という離散付値体を作る。すると、同義反復的な射

$$\mathrm{Spec}(L) \to Y_K$$

ができるが、この射には、Y_K 上の代数的な微分を（p 進）**「解析的に展開する場」**として利用するという意味において、以下の議論では、I., (D.) で登場した上半平面 $\mathfrak{H}$ と類似的な役目を演じてもらうことになる。

この射に対して、「基本群」という関手を施すと、準同型

$$\alpha_Y : \Gamma_L \to \Pi_{Y_K}$$

や、この準同型と与えられた同型との合成

$$\alpha_X : \Gamma_L \to \Pi_{X_K}$$

が定義される。これらの準同型に対して、Faltingsのp進Hodge理論を適用すると、**「関係式の保存」**を言うには、

α_Xの**幾何性**

（$= {}^{\exists}? \in X_K(L)$から生じる）が言えればよいことが分かる（II., (C.) を参照）。

ところが、α_Xの幾何性を直接証明することは難し過ぎるので、その代わり、そのことへの第一近似として、α_Xと、$X_K \to J^{(1)}_{X_K}$（$= X_K$からそのAlbanese多様体への自然な射）に引き起こされる基本群の間の射の合成

$$\alpha_X^J : \Gamma_L \to \Pi_{J^{(1)}_{X_K}}$$

の幾何性を、Tateの定理やBloch-加藤の理論を使って証明する (II., (D.), (E.) を参照）。すると、line bundleのChern類の一般論と初等的代数幾何から、X_Lが、Lのtameな拡大上で定義された有理点を、少なくとも一つ持っていること、つまり、

$$X_L(L^{\mathrm{tm}}) \neq \emptyset$$

が帰結される（III., (A.) を参照）。

最後に、α_Xを使って、X_Lのある自然な被覆の塔を構成し、その塔に出てくる各曲線に対して、先ほどのtameな有理点の存在性議論を適用する。なお、そうしてできる被覆曲線の有理点たちをX_Lに落すと、X_LのL^{tm}-有理点の列ができるが、この点列は必ずp進収束する、つまりp進位相における極限ξ_Xを持つのである (III., (B.), (C.) を参照)。しかも、この極限ξ_Xは、その構成から自動的に

$$\alpha_X = \pi_1(\xi_X)$$

を満たす。従って、これで、α_Xの**幾何性**が言えたことになるので、同型$X_K \cong Y_K$の構成、即ち定理1の証明が完結する。

参考文献

[BK] S. Bloch, K. Kato, *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, The Grothendieck Festschrift, Volume I, Birkhäuser, 1990, pp. 333–400.

[F1] G. Faltings, *p-adic Hodge theory*, J. of the Amer. Math. Soc. **1** (1988), 255–299.

[F2] G. Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), 349–366.

[H] O. Hyodo, *On the Hodge-Tate Decomposition in the Imperfect Residue Field Case*, J. reine angew. Math. **365** (1986), 97–113.

[M1] S. Mochizuki, *The profinite Grothendieck conjecture for hyperbolic curves over number fields*, J. Math. Sci., Univ. Tokyo **3** (1996), 571–627.

[M2] S. Mochizuki, *The local pro-p anabelian geometry of curves*, RIMS Preprint 1097, Kyoto Univ. (1996).

[M3] S. Mochizuki, *A Grothendieck conjecture-type result for certain hyperbolic surfaces*, RIMS Preprint 1104, Kyoto Univ. (1996).

[N] H. Nakamura, *Galois rigidity of the étale fundamental groups of punctured projective lines*, J. reine angew. Math. **411** (1990), 205–216.

[P1] F. Pop, *On Grothendieck's conjecture of birational anabelian geometry*, Ann. of Math. **138** (1994), 145–182.

[P2] F. Pop, *On Grothendieck's conjecture of birational anabelian geometry II*, Preprint (1995).

[T1] A. Tamagawa, *The Grothendieck conjecture for affine curves*, Compositio Math. **109** (1997), 135–194.

[T2] A. Tamagawa, *On the fundamental groups of curves over algebraically closed fields of characteristic* > 0, RIMS Preprint 1182, Kyoto Univ. (1998).